Вказівки щодо розв'язання завдання № 23 відбірково-тренувальних зборів команди міста Києва

1. Школа

Назвемо операцією кожну з таких двох дій: зміну порядку цифр числа (таку, що після неї на першому місці не стоїть нуль) та зменшення або збільшення однієї довільної цифри числа на один (при цьому нуль не може бути зменшено, а 9 — збільшено).

Спочатку визначимо, як отримати з n-цифрового числа a n-цифрове число b за найменшу можливу кількість операцій. Така кількість є невід'ємною, а отже обмеженою знизу. Існує щонайменше одна послідовність операцій, що переводить a у b (наприклад, послідовні $\left|a_i - b_i\right|$-кратні зміни i-ї цифри a_i числа a при кожному $1 \le i \le n$). Тому існує й така послідовність операцій, що має найменшу можливу довжину. Ця послідовність може мати щонайбільше одну операцію, яка змінює порядок цифр. Справді, нехай після всіх операцій цифра, що стояла на місці i, стане на місце $j(i)$ (при цьому, можливо, буде збільшена чи зменшена на певну кількість одиниць). Тоді загальна кількість операцій дорівнює $\sum_{i=1}^{n}\left|a_i - b_{j(i)}\right| + p$, де p — кількість операцій, що змінюють порядок цифр. Тоді значення p маємо покласти рівним 1, бо порахована кількість залежить лише від кінцевого розташування цифр, а розташувати цифри відповідним чином ми можемо за допомогою єдиної операції переставляння. Останнє твердження не є очевидним, враховуючи те, що в процесі здійснення операцій на першому місці у числі не може стояти нуль. Припустимо, що ми здійснили операцію, що переставляє цифри потрібним чином уже на першому ході. Якщо після цього на першому місці опиниться відмінна від нуля цифра, то на нуль вона в подальшому не перетвориться, бо у кінцевому числі (b) на першому місці також стоїть ненульова цифра. Якщо ж на першому місці все ж виявиться нуль, то замість того, щоб переставляти цифри першою операцією, збільшимо спочатку відповідний нуль у числі a на один, а вже після цього змінимо порядок цифр. Таким чином ми уникаємо проблем із нулем у старшому розряді номера маршруту. Тепер залишилось знайти таку підстановку $j(i)$, що вираз $\sum_{i=1}^{n}\left|a_i - b_{j(i)}\right|$ набуває найменшого можливого значення, а іншими словами — таку взаємно однозначну відповідність цифр чисел a та b, що загальна кількість операцій з перетворення однієї цифри на іншу у всіх парах стає мінімальною.

Припустимо, що цифри числа a впорядковано за неспаданням. Доведемо від супротивного, що у цьому випадку впорядкування цифр числа b за неспаданням забезпечить потрібний мінімум (якщо кожній цифрі числа a ставити у відповідність цифру b, що стоїть на місці з тим самим номером).

Оберемо таке розташування цифр числа b, яке серед тих, що забезпечують мінімум операцій, має найменшу можливу кількість порушень порядку (тобто таких пар сусідніх цифр, що більша стоїть лівіше від меншої). Це можна зробити, бо число всіх можливих розташувань скінченне. Якщо утвориться не впорядкований набір цифр, то в розташуванні існуватиме принаймні одне порушення порядку. Обмінявши відповідні цьому порушенню дві цифри місцями, ми по-перше залишимо властивість мінімальності, а по-друге зменшимо кількість порушень порядку принаймні на один: «початкове» порушення зникне, а нові з'явитися не можуть. Отримана суперечність свідчить про хибність припущення щодо немонотонності розташування цифр числа b.

Не слід забувати, що ми можемо зовсім не використовувати операції переставляння цифр. Якщо обмежитися лише операціями збільшення/зменшення цифр, то загальна їх кількість, необхідна для перетворення числа a на число b, дорівнює $\sum_{i=1}^{n} \left| a_i - b_i \right|$. Тут проблема із нулем у першому розряді відсутня. Обидві знайдені кількості (з використанням і без використання операції зміни порядку цифр) потрібно порівняти. Правильна відповідь буде збігатися із тією кількістю, що виявиться не більшою за іншу.

Для повного ж розв'язання задачі достатньо перебрати всі пари номерів маршрутів, на тролейбуси за якими Петрик може сісти біля дому, і на яких може приїхати до школи, для кожної пари визначити мінімальну кількість операцій, що перетворюють один номер пари на інший. Далі — обрати мінімальну для усіх пар кількість, і для відповідної пари вже відшукати маршрут пересадок Петрика (що робиться фактично із тих самих конструктивних міркувань, за допомогою яких ми знаходили кількість пересадок у маршруті).

Дослідимо складність наведеного алгоритму. Для його виконання необхідно перебрати mk пар, для кожної провести $O(n)$ операцій — сортування можна використовувати цифрове (лінійне). Доцільно впорядкувати цифри кожного числа окремо, ще до початку роботи основного алгоритму. Отже, складність алгоритму можна оцінити як $O(nmk)$.

2. Коло

Коло найменшого радіусу завжди буде проходити щонайменше через три задані точки або через дві, якщо вони є кінцями діаметра.

Алгоритм O(N^4) набирає 65% балів. Перебираючи по три точки з даних, визначаємо коло, що їх містить, та кількість точок, що лежать всередині кола. Вибираємо найменший радіус серед тих, що задовольняють умові.

Алгоритм O($N^2 \ln N \ln X$), де X — точність, з якою необхідно знайти радіус, набирає 100% балів.

Позначимо радіус кола через r. Виберемо серед даних одну точку A з координатами $(x ; y)$. Коло, що містить цю точку, має центр у точці з координатами вигляду $(x + r \cos \alpha ; y + r \sin \alpha)$.

Для кожної точки крім A визначимо, чи лежить вона всередині кола, що має радіус r і проходить через A, а якщо лежить, то до якого відрізка при цьому належить α.

Нехай A_i належить до кола, якщо α належить до $[a_i ; b_i]$. Впорядкуємо всі точки a_i, b_i, пам'ятаючи при цьому, яка з них була початком, а яка — кінцем. Надамо змінній c початкового значення 1. Перебираючи послідовно елементи впорядкованого масиву, робимо таке:

- якщо елемент є початком деякого відрізка $[a_i ; b_i]$, то збільшуємо c на 1;
- якщо елемент є кінцем деякого відрізка $[a_i ; b_i]$, то зменшуємо c на 1.

Отримана таким чином величина c дорівнює кількості точок, що належать до кола при певному α (за початкову величину взято 1, бо точка A також належить до кола).

Для кожної точки A запам'ятаємо максимальну з отриманих величин c при проходженні масиву. Максимальна величина c для всіх варіантів вибору A є найбільшою кількістю точок, які можна покрити кругом з радіусом r.

Шуканий радіус r знаходимо двійковим пошуком, використовуючи описані дії.

3. Канікули

У будь-який момент часу подальші затрати і прибуток Петрика залежать лише від населеного пункту v, де він зараз знаходиться, і множини S вже відвіданих сіл. Назвемо таку пару $(v; S)$ станом. Для подальшого руху Петрика не має значення, яким шляхом ми потрапили в поточний стан.

Розв'язання базується на знаходженні мінімальних затрат $t(v, S)$ (без врахування виплат за фотографування весіль), необхідних для досягнення кожного стану $(v; S)$, а потім — вибору найменшого значення $[t(\text{Київ}, S)/|S|] + 1$ за всіма S. Тут $[x]$ — ціла частина числа x.

Інакше кажучи, $t(v, S)$ — найкоротший шлях на графі G переходів між станами з вартостями ребер, що дорівнюють вартостям переходів між станами, від вершини (Київ ; {}) (другий елемент пари — порожня множина) до вершини $(v; S)$. Не обмежуючи загальності міркувань, вважаємо, що граф G повний, у якому відсутні згідно з умовою ребра мають нескінченну вартість.

Множина вже відвіданих сіл не зменшується з часом. Тому ми можемо послідовно знаходити оптимальні значення $t(v, S)$ в порядку збільшення S. Маємо: $t(\text{Київ}, \{\}) = 0$, $\quad t(v, \{\}) = 0$ при $v \neq$ Київ.

Ми можемо потрапити у стан $(v; S)$ двома способами:

а) перейти на останньому кроці зі стану $(u; S \setminus \{v\})$, якщо u належить до $S \setminus \{v\}$ (тобто відвідати село v *вперше*);

б) перейти на останньому кроці зі стану (u; S), якщо u належить до S (тобто відвідати село v *не вперше*).

В обох випадках v належить до S. Вартість кожного переходу — $c(u; v)$.

У будь-якому оптимальному шляху до стану (v; S) існує одне ребро вигляду (а), а всі наступні (можливо, порожня множина) матимуть вигляд (б) з тим самим *S в усіх випадках*. Нехай ми знаємо $t(u, S')$ при всіх u і всіх S', що є власними підмножинами S. Тоді ми можемо знайти найменшу вартість шляху, що закінчується переходом (а) у стан (v; S). Потім будемо шукати найменшу вартість шляху, що закінчується переходами (б) (можливо, з нульовою кількістю таких переходів) у стан (v; S) за допомогою модифікації алгоритма Дейкстри. З викладом цього алгоритму можна ознайомитися у підручниках з дискретної математики для студентів вищих навчальних закладів.

Псевдокод для сталого S має такий вигляд:

```
для всіх i
 t[i,S] := infinity;

для всіх i з множини S
 для всіх j з множини S\{i}
  t[i,S] := min(t[i,S], t[j,S\{i}] + c(j,i));

M := {};
поки M відмінне від S
 k := argmin t[k,S] за всіма k, що не належать до M;
 M := M + {k};
 для всіх j  з множини S - M
  t[j,S] := min(t[j,S], t[k,S] + c(k,j));
```

Виконавши це для всіх S у порядку зростання, ми знайдемо t(Київ, S) при всіх S і шукану вартість. Кількість операцій пропорційна $2^N \cdot N^2$.