Розбір задачі «Електронний годинник»

Заведемо зміну ans, в якій ми будемо зберігати відповідь. Також заведемо три змінні h, m, s – поточний час в годинах, хвилинах та секундах відповідно. Спочатку $h = m = s = 0$.

У добі є всього 86400 секунд. Тож ми 86400 разів можемо виконати наступну процедуру:

1. Якщо поточний час підходить, тобто всі цифри h, m, та s належать даній множині, то ми додаємо 1 до ans.

2. Збільшуємо поточний час на 1 секунду і відповідно змінюємо h, m, s (Наприклад, якщо s стало рівним 60, то ставимо s значення 0 і збільшимо на 1 m і т.д)

В кінці в змінній ans знаходиться наша відповідь.

Автор: Данило Мисак

Розробник: Іван Фекете

Розбір задачі «Масив»

Давайте для кожного простого числа p запам'ятаємо число cnt_p — скільки разів числа з масиву діляться на число p (для цього, наприклад, можна використовувати алгоритм факторизації за корінь з числа). Наприклад, якщо дано масив $[2, 4, 3]$, то на число 2 елементи масиву діляться 3 рази (один раз ділиться 2 і два рази ділиться 4).

Очевидно, що найбільше можливе НСД буде ділитися на p $\lfloor \frac{cnt_p}{n} \rfloor$ разів для кожного простого числа p.

Давайте заведемо змінні ans_v і ans_q, в яких будемо зберігати максимально можливе НСД елементів масиву і кількість операцій, яку потрібно зробити, щоб досягти такого НСД. Спочатку $ans_v = 1,\ ans_q = 0$.

Давайте пройдемося по всім числам від 2 до 10^6. Нехай поточне число — p. Якщо $\lfloor \frac{cnt_p}{n} \rfloor$ дорівнює нулю, то шукане НСД не буде ділитись на p, тож ми нічого не робимо і продовжуємо розглядати наступне число.

Якщо ж $\lfloor \frac{cnt_p}{n} \rfloor > 0$, то це означає, що наше НСД обов'язково буде ділитися на $p^{\lfloor \frac{cnt_p}{n} \rfloor}$, тож домножуємо ans_v на $p^{\lfloor \frac{cnt_p}{n} \rfloor}$. Пройдемося по всім елементам масиву. Нехай поточний елемент ділиться на число p рівно q разів. Тоді можливі два випадки:

1. $q \geqslant \lfloor \frac{cnt_p}{n} \rfloor$. Отже, поточне число і так ділиться на p потрібну кількість разів, отже, нічого не робимо, переходимо до наступного елемента масиву.

2. $q < \lfloor \frac{cnt_p}{n} \rfloor$. Отже, для того, щоб поточне число ділилось на p потрібну кількість разів, нам потрібно його $(\lfloor \frac{cnt_p}{n} \rfloor - q)$ разів домножити на p. Кожна операція може один раз домножити це число на p. Отже, до ans_q додаємо $(\lfloor \frac{cnt_p}{n} \rfloor - q)$. Тепер можемо розглядати наступний елемент масиву.

В кінці алгоритму в змінні ans_v і ans_q зберігають максимально можливе НСД елементів масиву і кількість операцій, яку потрібно зробити, щоб досягти такого НСД.

Джерело: Чвертьфінал ICPC 2017-2018, Україна, задача L

Розробник: Станіслав Безкоровайний

Розбір задачі «Розмальовка»

Кількість операцій в оптимальній послідовності не перевищуватиме $n + m$. Тому задачу можна розв'язати жадібно за $O(nm(n + m))$, ідучи ззаду наперед і щоразу шукаючи рядок або стовпець, який не містить клітинок постороннього кольору.

Повний бал можна набрати так. Спершу встановити колір кожного рядка та стовпця, для яких він встановлюється однозначно: або за $O(nm \log(nm))$, якщо сортувати кожен рядок і стовпець окремо та знаходити хоча б пару однакових кольорів, або за $O(n + m)$, якщо послідовно розглядати водночас по два рядки і два стовпці, колір жодного з яких ще не встановлено (аналіз чотирьох клітинок їхнього перетину дозволить встановити колір бодай одного нового рядка або стовпця). Далі підрахувати для кожного рядка і стовпця кількість клітинок стороннього кольору, відсортувати за цим показником окремо рядки і стовпці (скориставшись сортуванням підрахунком, це можна зробити за $O(n + m)$ часу) і рухатися ззаду наперед у порядку збільшення кількості клітинок стороннього кольору, чергуючи рядки та стовпці. У кінці через неоднозначність розфарбування може довестися розглянути випадок одного рядка/стовпця, що залишився, і кількох відповідно стовпців/рядків, але це вже нескладно.

Загальний час виконання можна оцінити як $O(nm \log(nm))$ або $O(nm)$ залежно від реалізації.

Автор: Данило Мисак

Розробники: Іван Фекете та Марко Гришечкін

Розбір задачі «НСД»

Позначимо за $G(x)$ кількість пар чисел a, b таких, що:

- $l1 \leqslant a \leqslant r1$, $l2 \leqslant b \leqslant r2$
- $gcd(a, b)$ ділиться на x.

Друга умова виконується тоді, і тільки тоді, коли a ділиться на x, і b ділиться на x. Тоді маємо наступну формулу:

$G(x) = (\frac{r_1}{x} - \frac{l_1 - 1}{x}) \cdot (\frac{r_2}{x} - \frac{l_2 - 1}{x})$ (ділення цілочисельне).

Позначимо за $D(x)$ кількість пар чисел a, b таких, що:

- $l_1 \leqslant a \leqslant r_1$, $l_2 \leqslant b \leqslant r_2$
- $gcd(a, b) = x$.

З означень $G(x)$ та $D(x)$ маємо формулу:

$D(x) = G(x) - (D(2 \cdot x) + D(3 \cdot x) + D(4 \cdot x) + \dots)$

Отже, ми можемо знайти усі значення $D(x)$ наступним чином: перебираємо x від найбільшого значення $(\max(r_1, r_2))$ до 1, за формулою знаходимо $G(x)$, перебираємо усі $k \cdot x$ і рахуємо $D(x)$.

Зрозуміло, що відповіддю на задачу буде сума $D(x) \cdot x$ по всім x.

Якщо $n = \max(r_1, r_2)$, то описане рішення працює за $O(n \log n)$.

Джерело: Чвертьфінал ICPC 2017-2018, Україна, задача F

Розробник: Марко Гришечкін